

Ad-Soyad :

No :

Email :

İmza :

(18.01.2010-Final)
0113620 – Sayısal İşaret İşleme

S1. $x(t) = \begin{cases} -t & -1 < t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$ fonksiyonu verildiğine göre

(a) fonksiyona ait grafiği çiziniz.

(b) $y(t) = x(t+1)$ olduğuna göre $y(t)$ ifadesini bulunuz.

(c) $y(t)$ fonksiyonunu çiziniz.

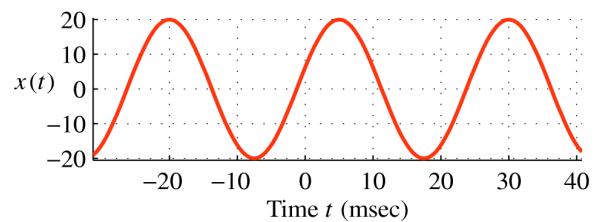
(5)

(5)

(5)

S2. Yandaki sinusoidal işaret aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x(t) = A\cos(\omega_0(t-t_m)) = A\cos(\omega_0t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Buna göre A , f_0 , t_m ve ϕ değerlerini belirleyiniz.

(10)

S3. $x(t) = 10 + 20\cos(20\pi t + 0.25\pi) + 10\cos(50\pi t)$ işaretin kompleks eksponansiyel işaretlerin toplamı (Fourier bileşenlerinin toplamı) olarak ifade edilebildiğine göre;

(a) $x(t)$ yi oluşturan frekans bileşenlerini ve bunlara karşı gelen kompleks genlikleri (a_k) bulunuz.

(5)

(b) $x(t)$ peryodik bir işaretmidir? Eğer periyodikse, bu işaretin temel periyodu nedir?

(5)

(c) $x(t)$ nin frekans spektrumunu çiziniz.

(5)

(d) $x(t)$ nin katlanma (aliasing) olmadan örneklenmesi için gereken örnekleme frekansını bulunuz.

(5)

(e) $x(t)$ işaretin $f_s = 25$ Hz lik bir örnekleme frekansı ile örneklenmeye göre örneklenmiş ayrıklık işaretin ($x[n] = x(nT)$) ifadesini bulunuz.

(10)

S4. Doğrusal zamanla değişmeyen (lineer time-invariant) bir sistem $y[n] = 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$ gibi bir fark denklemi ile belirlenmektedir. Buna göre;

(a) Bu sistemin darbe cevabı (impulse response, $h[n]$) nedir?

(5)

(b) Bu sisteme ait sistem fonksiyonu $H[z]$ yi bulunuz.

(5)

(c) Sistemin 0 ve **kutuplarını** bulunuz.

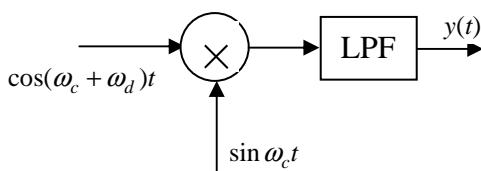
(5)

(d) $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$ olarak verildiğine göre $y[n]$ yi bulunuz.

(10)

S5. Aşağıdaki sistemde alçak geçiren süzgeçin kesim frekansı ω_c olduğuna göre sistemin çıkışı $y(t)$ ne olur.

(10)



S6. (a) Fourier dönüşümü gözönüne alındığında; belirsizlik prensibi (Uncertainty Principle) nedir açıklayınız?

(5)

(b) FIR ve IIR süzgeçleri arasındaki temel fark nedir?

(5)

S7. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -T < t < T \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$ olarak verildiğine göre; $x(t)$ nin Fourier dönüşümünü bulunuz.

(10)

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

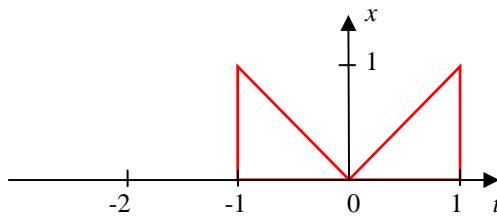
$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$$

CEVAPLAR

C1.

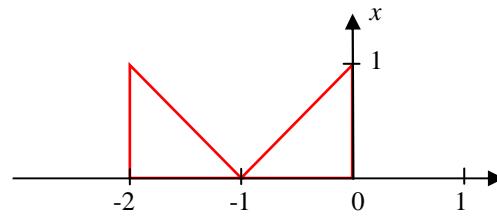
(a)

$$x(t) = \begin{cases} -t & -1 < t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



(b)

$$y(t) = x(t+1) = \begin{cases} -t-1 & -2 < t < -1 \\ t+1 & -1 < t < 0 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



C2.

$$A = 20 \quad T_0 = 0.025 \text{ sn} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0.025} = 40 \text{ Hz}$$

$$t_m = 0.005 \text{ sn} \quad \phi = -\omega_0 t_m = -2\pi f_0 t_m = -2\pi 40(0.005) = -0.4\pi$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = 20 \cos(80\pi t - 0.4\pi)$$

C3.

(a)

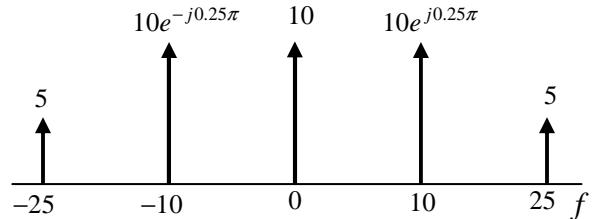
$$x(t) = 10 + 20 \left(\frac{e^{j20\pi t + 0.25\pi} + e^{-j20\pi t - 0.25\pi}}{2} \right) + 10 \left(\frac{e^{j50\pi t} + e^{-j50\pi t}}{2} \right)$$

$$x(t) = 10 + (10e^{j0.25\pi}) e^{j20\pi t} + (10e^{-j0.25\pi}) e^{-j20\pi t} + 5e^{j50\pi t} + 5e^{-j50\pi t}$$

$$f_0 = 0 \text{ Hz}, \quad f_1 = 10 \text{ Hz}, \quad f_2 = 25 \text{ Hz}$$

(b) Temel frekans 10 ve 25'in OBEB değeridir:

(c)



Temel frekans = 5 Hz,

Temel periyot = 1/5 = 0.2 sn

(d) Örnekleme teoremine göre örnekleme frekansı en büyük frekans bileşeninin en az iki katı olmalıdır. Buna göre; Örnekleme frekansı $f_s = 2f_2 = 50$ Hz olmalıdır.

(e)

$$f_s = 25 \text{ Hz} \quad x[n] = x(nT_s) = x\left(\frac{n}{f_s}\right) = x\left(\frac{n}{25}\right)$$

$$x(t) = 10 + 20 \cos(20\pi t + 0.25\pi) + 10 \cos(50\pi t)$$

$$x[n] = 10 + 20 \cos\left(20\pi \frac{n}{25} + 0.25\pi\right) + 10 \cos\left(50\pi \frac{n}{25}\right)$$

$$x[n] = 10 + 20 \cos\left(20\pi \frac{n}{25} + 0.25\pi\right) + 10 \cos(2\pi n)$$

$$10 \cos(2\pi n) = 10$$

$$x[n] = 20 + 20 \cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

C4.

- (a) Sistemin darbe cevabı: $h[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2]$
- (b) Sistem fonksiyonu: $H(z) = 2 - z^{-1} - z^{-2}$
- (c) Sıfır ve kutuplar: $H(z) = 2 - z^{-1} - z^{-2} = \frac{2z^2 - z - 1}{z^2} = \frac{(2z+1)(z-1)}{z^2}$ sıfırlar: -0.5, 1; kutuplar: 0 da iki tane
- (d) $y[n] = h[n] * x[n]$

$$\begin{array}{r} h[n] \\ \underline{x[n]} \\ \hline y[n] \end{array} \quad \begin{array}{rrr} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ & -2 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$y[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-4]$$

C5.

$$\begin{aligned} \sin \omega_c t \times \cos(\omega_c + \omega_d)t &= \left(\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} \right) \left(\frac{e^{j(\omega_c + \omega_d)t} + e^{-j(\omega_c + \omega_d)t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4j} \left\{ e^{j\omega_c t} e^{j(\omega_c + \omega_d)t} + e^{j\omega_c t} e^{-j(\omega_c + \omega_d)t} - e^{-j\omega_c t} e^{j(\omega_c + \omega_d)t} - e^{-j\omega_c t} e^{-j(\omega_c + \omega_d)t} \right\} \\ &= \frac{1}{4j} \left\{ e^{j(\omega_c + \omega_c + \omega_d)t} + e^{-j(-\omega_c + \omega_c + \omega_d)t} - e^{j(-\omega_c + \omega_c + \omega_d)t} - e^{-j(\omega_c + \omega_c + \omega_d)t} \right\} \\ &= \frac{1}{4j} \left\{ e^{j(2\omega_c + \omega_d)t} - e^{-j(2\omega_c + \omega_d)t} - e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{j(2\omega_c + \omega_d)t} - e^{-j(2\omega_c + \omega_d)t}}{2j} - e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{j(2\omega_c + \omega_d)t} - e^{-j(2\omega_c + \omega_d)t}}{2j} - \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin(2\omega_c + \omega_d)t - \sin \omega_d t \right\} \end{aligned}$$

Alçak geçiren sözgelenin kesim frekansı ω_c olduğu için frekansı “ $2\omega_c + \omega_d$ ” olan işaret bastırılacaktır. Dolayısı ile sonuç aşağıdaki gibidir:

$$y(t) = -\frac{1}{2} \sin \omega_d t$$

C6.

- (a) Zaman çözünürlüğü ve frekans çözünürlüğü bir birlerine göre ters orantılıdır (Cannot simultaneously reduce time duration and bandwidth).
- (b) FIR filtre şimdiki ve geçmişteki girişleri kullanır, IIR filtre ise şimdiki ve geçmiş zamandaki girişlerle birlikte geçmişteki çıkışları da kullanır.

C7.

$$X(\omega) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T \frac{1}{2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j} = \frac{\sin \omega T}{\omega}$$